

Equations du second degré

Activité 5 : Construire un tableau de signe d'une fonction et l'allure de la courbe à partir d'une expression factorisée

Soit une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

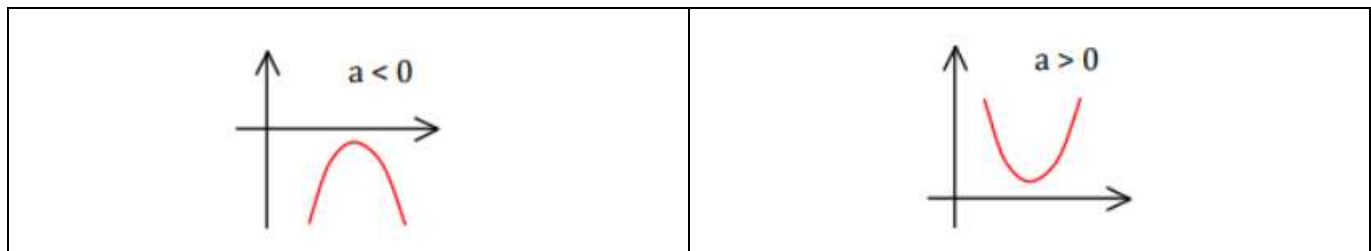
Les coordonnées du sommet d'une parabole est $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

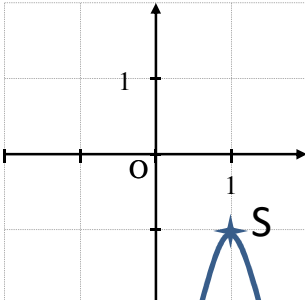
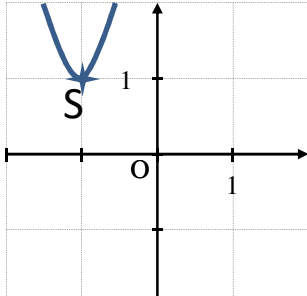
1) Si il n'y a pas de solution, le polynôme n'est pas factorisable : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- 2 cas sont possibles :

➤ Si a est négatif (a <0)	➤ Si a est positif (a >0)												
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">- (Signe de a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	- (Signe de a)		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">+ (Signe de a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	+ (Signe de a)	
x	$-\infty$	$+\infty$											
$ax^2 + bx + c$	- (Signe de a)												
x	$-\infty$	$+\infty$											
$ax^2 + bx + c$	+ (Signe de a)												

- Allure de la courbe :



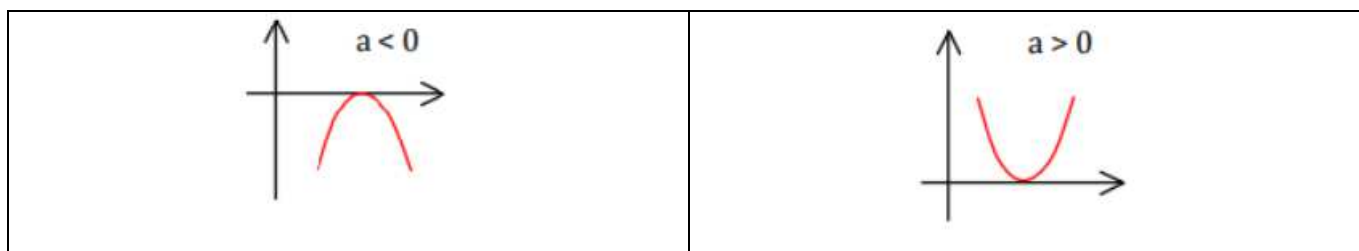
➤ Exemple : $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$	Exemple : $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$												
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$-3x^2 + 6x - 4$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$-3x^2 + 6x - 4$	-		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$3x^2 + 6x + 4$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$3x^2 + 6x + 4$	+	
x	$-\infty$	$+\infty$											
$-3x^2 + 6x - 4$	-												
x	$-\infty$	$+\infty$											
$3x^2 + 6x + 4$	+												
$a = -3$	$a = 3$												
<u>Coordonnées du sommet :</u> $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-3)} = 1$ $f(-\frac{b}{2a}) = f(1) = -3 \times 1^2 + 6 \times 1 - 4 = -3 + 6 - 4 = -1$	<u>Coordonnées du sommet :</u> $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (3)} = -1$ $f(-\frac{b}{2a}) = f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + 4 = 3 - 6 + 4 = 1$												
<u>Allure de la courbe :</u> 	<u>Allure de la courbe :</u> 												

2) Si il y a une seule solution, le polynôme est factorisable : $f(x) = a(x - x_1)^2$

- 2 cas sont possibles :

➤ Si a est négatif ($a < 0$)		➤ Si a est positif ($a > 0$)																	
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$a(x - x_1)^2$</td><td>- (Signe de a)</td><td>0</td><td>- (Signe de a)</td></tr> </table>		x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$a(x - x_1)^2$	- (Signe de a)	0	- (Signe de a)	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$a(x - x_1)^2$</td><td>+ (Signe de a)</td><td>0</td><td>+ (Signe de a)</td></tr> </table>		x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$a(x - x_1)^2$	+ (Signe de a)	0	+ (Signe de a)
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$																
$a(x - x_1)^2$	- (Signe de a)	0	- (Signe de a)																
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$																
$a(x - x_1)^2$	+ (Signe de a)	0	+ (Signe de a)																

- Allure de la courbe :



➤ Exemple : $f(x) = -2x^2 + 4x - 2 = -2(x - 1)^2$		Exemple : $f(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$																	
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$-2(x - 1)^2$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr> </table>		x	$-\infty$	1	$+\infty$	$-2(x - 1)^2$	-	0	-	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$2(x + 1)^2$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>		x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$2(x + 1)^2$	+	0	+
x	$-\infty$	1	$+\infty$																
$-2(x - 1)^2$	-	0	-																
x	$-\infty$	-1	$+\infty$																
$2(x + 1)^2$	+	0	+																
$a = -2$ $x_1 = 1$		$a = 2$ $x_1 = -1$																	
<u>Coordonnées du sommet :</u> $-b/2a = -4/(2 \times (-2)) = 1$ $f(-b/2a) = f(1) = -2(1 - 1)^2 = 0$		<u>Coordonnées du sommet :</u> $-b/2a = -4/(2 \times (2)) = -1$ $f(-b/2a) = f(-1) = 2(-1 + 1)^2 = 0$																	
<u>Allure de la courbe :</u>		<u>Allure de la courbe :</u>																	

3) Si il y a deux solutions, le polynôme est factorisable : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- 2 cas sont possibles :

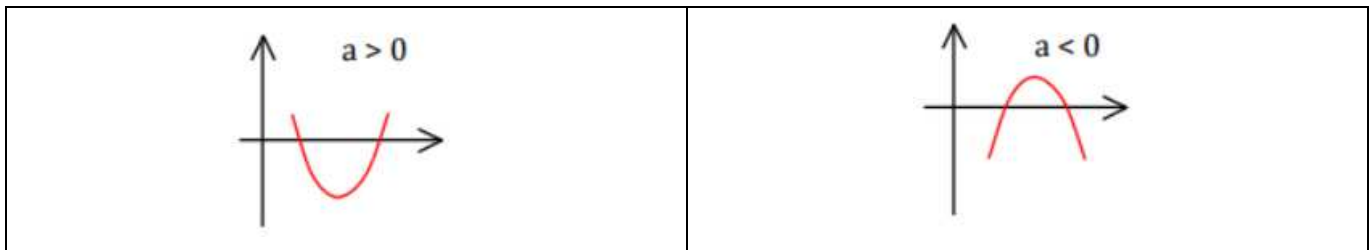
➤ Si **a** est négatif (**a**<0)

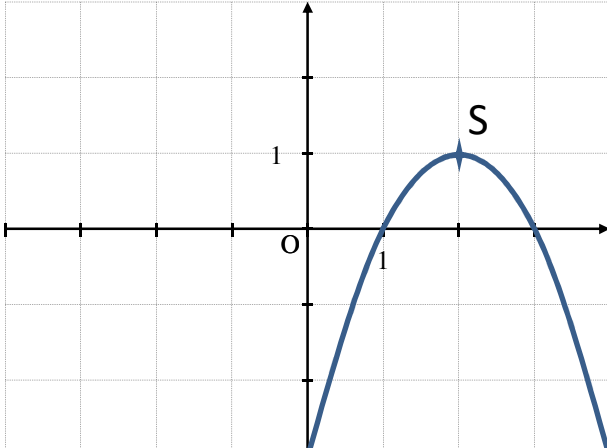
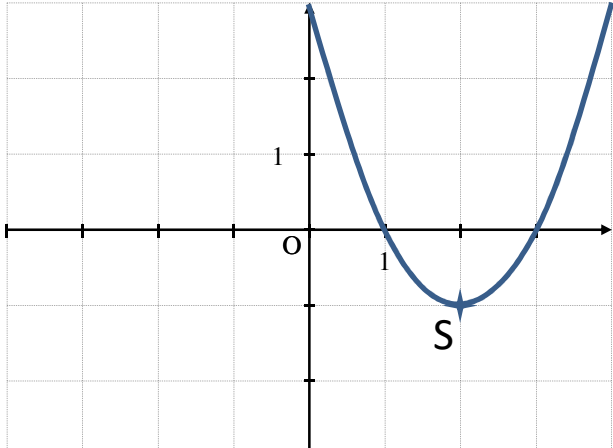
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	-	0	+	0	-
	(Signe de a)		(Signe opposé de a)		(Signe de a)

➤ Si **a** est positif (**a**>0)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	-	0	+
	(Signe de a)		(Signe opposé de a)		(Signe de a)

- Allure de la courbe :



➤ Exemple : $f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -1(x - 1)(x - 3)$						Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 1(x - 1)(x - 3)$																													
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$-1(x - 1)(x - 3)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>						x	$-\infty$	1		3	$+\infty$	$-1(x - 1)(x - 3)$	-	0	+	0	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$1(x - 1)(x - 3)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>						x	$-\infty$	1		3	$+\infty$	$1(x - 1)(x - 3)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	1		3	$+\infty$																														
$-1(x - 1)(x - 3)$	-	0	+	0	-																														
x	$-\infty$	1		3	$+\infty$																														
$1(x - 1)(x - 3)$	+	0	-	0	+																														
$a = -1$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$						$a = 1$ $x_1 = 1$ $x_2 = -3$																													
<u>Coordonnées du sommet :</u> $-b/2a = -4/(2 \times (-1)) = 2$ $f(-b/2a) = f(2) = -1 \times (1) \times (-1) = 1$						<u>Coordonnées du sommet :</u> $-b/2a = -(-4)/(2 \times (1)) = 2$ $f(-b/2a) = f(2) = 1 \times (1) \times (-1) = -1$																													
<u>Allure de la courbe :</u> 						<u>Allure de la courbe :</u> 																													

Bilan :

Soit une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- **Pour construire un tableau de signe** d'une fonction, il faut :
 - ❖ Vérifier le signe de a (positif ou négatif)
 - ❖ Extraire la ou les solutions de l'expression factorisée si elles existent (x_1, x_2)
 - ❖ Compléter le tableau de signe en plaçant les valeurs correspondantes au bon endroit et en indiquant « + » si c'est positif et « - » si c'est négatif
- **Pour tracer l'allure d'une courbe**, il faut :
 - ❖ Vérifier le signe de a :
 - Si a est positif, la parabole est dirigée vers le haut.
 - Si a est négatif, la parabole est dirigée vers le bas.
 - ❖ Repérer la ou les solutions de l'expression factorisée si elles existent (x_1, x_2) et placer le ou les points correspondants sur l'axe des abscisses.
 - ❖ Si il n'y a pas de solution, trouver le sommet de la parabole :
 - $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$